



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Consejo Académico del Bachillerato



REPOSITORIO DE RECURSOS EDUCATIVOS DIGITALES
 DEL CONSEJO ACADÉMICO DEL BACHILLERATO (RU-CAB)

Propuesta de formato para estrategia o secuencia didáctica de un recurso digital

Datos de identificación			
Persona (s) Autora (s)		Colegio o área	Plantel
Dr. José Manuel Becerra Espinosa		Matemáticas	Escuela Nacional Preparatoria Plantel 8 "Miguel E. Schulz"
Asignatura o asignaturas para las que se propone el recurso		Aprendizaje o contenido abordados en el recurso	Grado/Semestre
Matemáticas V		<p>En esta unidad se expone la Recta de Euler. Se aborda como en esta recta se sitúan los puntos conocidos como el ortocentro, el circuncentro y el baricentro de un triángulo. Sus temas se explican de manera sencilla y con numerosos ejemplos.</p> <p>Por su relevancia, su contenido puede elegirse como la unidad optativa que establece la asignatura de Matemáticas V del plan de estudios de la Escuela Nacional Preparatoria de la UNAM.</p>	5º de la Escuela Nacional Preparatoria
Título del recurso educativo digital interactivo		Objetivos/Propósitos del recurso digital interactivo (¿Qué quiero que el alumno aprenda con el recurso?)	
Recta de Euler (Unidad optativa)		<p>Que los y las estudiantes:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Desarrollen la capacidad de abstracción matemática que le permita obtener los puntos notables de un triángulo y expliquen el comportamiento de la Recta de Euler cuando se modifican sus vértices, al tiempo que se repasen las condiciones de colinealidad de tres puntos. • Destaquen la importancia de la Recta de Euler en la geometría euclidiana y analítica considerando que se puede construir en forma geométrica (regla y compas o software) o algebraicamente y reflexionen sobre la posición de los puntos notables y la relación de sus distancias. 	
Tipo de recurso didáctico digital (ejemplo: video, presentación, etcétera)	Libro Electrónico.	Elementos que integran el recurso educativo digital interactivo (ejemplo: imágenes, cuestionario, tutorial, etc.)	<ul style="list-style-type: none"> - Desarrollo formal de temas. - Imágenes. - Ejercicios didácticos.
Tiempo requerido para implementar el recurso		20 horas	



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Consejo Académico del Bachillerato



REPOSITORIO DE RECURSOS EDUCATIVOS DIGITALES
 DEL CONSEJO ACADÉMICO DEL BACHILLERATO (RU-CAB)

Propuesta de formato para estrategia o secuencia didáctica de un recurso digital

Tipo de recurso educativo didáctico digital (ejemplo: video, presentación, etcétera):	Medias que componen el recurso educativo digital interactivo (Una Media corresponde a un objeto digital; ejemplo: imagen, cuestionario, video, entre otros):	Tiempo requerido para implementar el recurso educativo digital interactivo:
Libro electrónico	Texto (desarrollo formal de temas; ejercicios didácticos; problemas de modelación matemática) Imágenes (Figuras, gráficas, esquemas) Tablas	20 horas

Modalidad para la que se recomienda		
Presencial:	No presencial:	Ambos: x

DESARROLLO DEL APRENDIZAJE CON EL RECURSO (¿Qué actividades sugiero para usar el recurso?)

FASE DE INICIO			
Actividades presenciales	Tiempo	Actividades no presenciales	Tiempo
<p>En esta fase, se expondrá el tema de la recta de Euler.</p> <p>Se explicará que, en todo triángulo no equilátero, se cumple la siguiente propiedad: el ortocentro, el baricentro y el circuncentro están alineados. La recta que contiene estos tres puntos se llama recta de Euler.</p> <p>Lo anterior aplica una explicación intuitiva de los siguientes temas:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Euler y el triángulo 2. Medianas de un triángulo. Baricentro 3. Mediatrices de un triángulo. Circuncentro 4. Alturas de un triángulo. Ortocentro 5. Recta de Euler 6. Circunferencia de los nueve puntos <p>Estos temas pueden ser consultados en el recurso <i>Matemáticas V</i>.</p>		<p>Investigación sobre la importancia de la Recta de Euler en la geometría euclidiana.</p> <p>Conocerá que Leonhard Euler es uno de los matemáticos de la historia con mayor reconocimiento. Esto se debe tanto a la gran cantidad de trabajos que escribió como a la importancia de los mismos. Sus contribuciones a la Geometría en diferentes niveles y con diversos grados de profundidad son en particular notables.</p> <p>Comprenderá que, además de destacarse los lados y los ángulos de un triángulo, también pueden definirse otros elementos de interés como son sus puntos y rectas notables. Uno de los múltiples resultados matemáticos que Euler demostró en 1765, es que tres puntos tan particulares como son el ortocentro, el baricentro y el circuncentro de un triángulo, siempre están alineados, y la recta que pasa por ellos es la que lleva su nombre.</p>	2 horas



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Consejo Académico del Bachillerato



REPOSITORIO DE RECURSOS EDUCATIVOS DIGITALES
 DEL CONSEJO ACADÉMICO DEL BACHILLERATO (RU-CAB)

Propuesta de formato para estrategia o secuencia didáctica de un recurso digital

FASE DE DESARROLLO			
Actividades presenciales	Tiempo	Actividades no presenciales	Tiempo
<p>En esta fase, se realizará una exposición formal de los contenidos de la fase de inicio y se realizarán múltiples ejercicios.</p> <p>Se expondrá que en los triángulos se puede denotar un grupo de rectas y puntos muy importantes. Entre las rectas notables más conocidas de un triángulo se pueden nombrar las mediatrices, las medianas, las alturas y las bisectrices; cada una de estas rectas notables determina cierto punto notable: circuncentro, baricentro, ortocentro e incentro, respectivamente.</p> <p>Se explicará que la recta de Euler es una recta en la que están situados el ortocentro, el circuncentro y el baricentro de un triángulo no equilátero.</p> <p>Además, se presentará a la circunferencia de los nueve puntos de un triángulo. La circunferencia de los nueve puntos es una circunferencia que tiene por centro el punto medio del segmento que une el ortocentro y el circuncentro y que pasa por:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Los puntos medios de los tres lados. • Los pies de las tres alturas (puntos de intersección de las alturas con los lados). • Los puntos medios de los segmentos que unen el ortocentro y los tres vértices. <p>Los resultados se expresarán tanto en forma analítica como geométrica y se aplicará el software GeoGebra para hacer las presentaciones más dinámicas.</p>		<p>Estudio de cada uno de los temas y análisis detallado de los conceptos abordados.</p> <p>Conocerá que:</p> <ul style="list-style-type: none"> • La mediana de un triángulo se define como la recta que une dicho vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto. • La altura de un triángulo, respecto de uno de sus lados, se define como la recta perpendicular a dicho lado que pasa por el vértice opuesto. • La mediatriz de un lado de un triángulo se define como la recta perpendicular a dicho lado que pasa por su punto medio. • La bisectriz de un triángulo, correspondiente a uno de sus vértices, se define como la recta que, pasando por dicho vértice, divide al ángulo correspondiente en dos partes iguales. 	15 horas
FASE DE CIERRE			
	Tiempo	Actividades no presenciales	Tiempo
<p>Se realizará una síntesis de todos los conceptos vistos previamente mediante la participación grupal de los alumnos, resolviendo ejercicios didácticos, utilizando GeoGebra y argumentando su solución.</p> <p>Se enfatizará que:</p> <ul style="list-style-type: none"> • En el caso de un triángulo equilátero, el baricentro, el ortocentro, el circuncentro y el incentro coinciden en un mismo punto interior, que está a la misma distancia de los tres vértices. 		<p>A través de ejercicios seleccionados el alumno repasará todos los conceptos esenciales.</p> <p>Reconocerá que si un triángulo es equilátero entonces su circuncentro, baricentro y ortocentro coinciden. En otro caso Euler demostró que esos tres puntos están siempre alineados. A la línea que pasa por esos puntos se le denomina recta de Euler del triángulo.</p> <p>Comprenderá que los conceptos son de utilidad en la vida real. Por ejemplo, los triángulos son herramientas eficaces para la arquitectura y se</p>	3 horas



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Consejo Académico del Bachillerato



REPOSITORIO DE RECURSOS EDUCATIVOS DIGITALES
DEL CONSEJO ACADÉMICO DEL BACHILLERATO (RU-CAB)

Propuesta de formato para estrategia o secuencia didáctica de un recurso digital

<ul style="list-style-type: none"> Se cumple que la distancia del ortocentro al baricentro es el doble que la del baricentro al circuncentro. <p>Las siguientes actividades las deben realizar en equipos de cuatro estudiantes:</p> <p>a) Exponer situaciones de la vida cotidiana en que se apliquen los puntos notables del triángulo.</p> <p>b) Se presentarán la importancia de la circunferencia de los nueve puntos.</p> <p>c) Plantear un problema de la vida real ingeniería que pueda modelarse a través de los conceptos vistos en clase.</p> <p>d) Se discutirán en pleno sus resultados e interpretaciones.</p> <p>e) De manera individual, elaborar un esquema con todos los elementos geométricos que se abordaron.</p>		<p>utilizan en el diseño de los edificios y otras estructuras, ya que proporcionan resistencia y estabilidad. Cuando se utilizan materiales de construcción para formar un triángulo, el diseño tiene una gran base y el pináculo de la parte superior es capaz de administrar el peso porque la energía se distribuye a través de todo el triángulo.</p> <p>En la actualidad existen muchas estructuras que están formadas a base de triángulos unidos entre sí que adquieren rigidez y tienen varias aplicaciones dentro de los proyectos de estructuras arquitectónicas.</p> <p>Muchos diseños arquitectónicos toman como base los puntos notables de un triángulo para hacerlos más funcionales, estéticos y resistentes.</p>	
---	--	---	--

El recurso inicia y desarrolla la unidad V (Tema optativo) de la asignatura de Matemáticas V de la ENP

Los contenidos del recurso se apegan estrictamente al programa de estudio vigente.

Describirlo:

Este libro electrónico aborda íntegramente la unidad 5 que propone el programa actualizado de la asignatura de Matemáticas V de la ENP, contribuyendo en la futura preparación académica del estudiante. Cubre la necesidad de que los estudiantes del bachillerato adquieran conceptos que puedan aplicar a su entorno cotidiano. Por ello, se explican los contenidos fundamentales. Por su pertinencia se aborda la recta de Euler. La selección de los contenidos tiene como objeto brindar un panorama introductorio para aquellos alumnos que deseen cursar alguna carrera de las ciencias físico matemáticas.

Como inicio, el material está planeado para trabajar tanto en la modalidad presencial como en la virtual. En ambos casos, siempre contará con la supervisión permanente del docente.

El desarrollo es puntual:

- Una vez revisado el material, el o la estudiante anotará sus dudas, si no las hubiere, podrá seguir adelante; de lo contrario, deberá anotarlas y plantearlas a la o el docente, o bien, escribir al correo jose.becerra@enp.unam.mx
- Aclaración de dudas a la o el docente.
- Resolución de ejercicios propuestos.
- Realimentación del o la docente.
- Conclusiones en sesión o contacto con la o el docente.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Consejo Académico del Bachillerato



REPOSITORIO DE RECURSOS EDUCATIVOS DIGITALES
DEL CONSEJO ACADÉMICO DEL BACHILLERATO (RU-CAB)

Propuesta de formato para estrategia o secuencia didáctica de un recurso digital

PROPUESTA DE EVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE LOGRADO CON EL RECURSO

- Exponer un problema de ingeniería en el que se puedan aplicar los conceptos expuestos.
- Obtención geométrica y analítica de la recta de Euler para 2 triángulos no equiláteros.
- Revisión y resolución de las actividades del applet 61 de Matemáticas V, alojado en la página:
<http://prepa8.unam.mx/academia/colegios/matematicas/paginacolmate/applets/applets.html>
- Resolución de los reactivos de opción múltiple de la página:
<http://prepa8.unam.mx/academia/colegios/matematicas/paginacolmate/examenesporunidad/matematicas05/m5unidad07/m5unidad07.html>
- Realizar una infografía con los conceptos y aplicaciones más relevantes de los conceptos de la unidad.

REFERENCIAS

- Becerra, José Manuel (2022). *Matemáticas V. Unidad Optativa. Recta de Euler*. Página del Colegio de Matemáticas del plantel 8 de la ENP. México: UNAM. Disponible en:
<http://prepa8.unam.mx/academia/colegios/matematicas/paginacolmate/>
- Bulajich, R. & Gómez, J.A. (2002) *Geometría, Cuadernos de las Olimpiadas de Matemáticas*. México: IMATE-UNAM.
- Cárdenas, S. (2013). *Notas de geometría*. México: Prensas de ciencias.
- Coxeter, H., Greitzer, S. (1967). *Geometry revisited*. New Math. Library, MAA.
- Eves, H. (1985). *Estudio de las Geometrías*. UTHEA.
- Geometría del triángulo*. Disponible en:
http://newton.matem.unam.mx/geometria/t_2_007/t_2_007_m.html
- Lucio, G. *Geometría Moderna I*. Facultad de Ciencias UNAM. Disponible en:
https://sistemas.fciencias.unam.mx/~mglgm/GMI_Unidades1_2_3_4.pdf
- Lucio, G., San Agustín, R., Martínez de la Escalera, N. (2001) Un poco de geometría. México: Vínculos Matemáticos # 155, Notas de clase. Facultad de Ciencias, UNAM.
- Shively, L. (1977). *Introducción a la geometría moderna*. México: CECSA.
- Wentworth, J. y Smith, D. (1993). *Geometría plana y del espacio*, 18ª edición. México: Porrúa.